CONCOURS 1983

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

N.B. : *Les parties* I, II, III *du problème sont indépendantes*

I

Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Soit (γ) l'hélice circulaire dont une représentation paramétrique est

$$\varphi \in \mathbb{R} \to M \begin{cases} x = 4\cos\varphi \\ y = 4\sin\varphi \\ z = 3\varphi \end{cases}$$

a. Représenter graphiquement les projections orthogonales de (γ) sur les plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $(O, \vec{j}, \vec{k})$; $(O, \vec{i}, \vec{k})$ pour $\varphi \in [-\pi, +\pi]$.

b. On orientera (γ) dans le sens des φ croissants. Déterminer au point M le trièdre de Frenet ainsi que le rayon de courbure R et de torsion T.

2° Soit $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en M. Soit s l'abscisse curviligne de M dont l'origine est le point O_1 de (γ) de coordonnées (4, 0, 0).

a. Déterminer toutes les fonctions numériques dérivables λ telles que le point P défini par : $(\forall s)\ \overrightarrow{OP}(s) = \overrightarrow{OM}(s) + \lambda(s)\,\vec{\tau}(s)$ décrive un arc (Γ) tel que, pour tout s, le vecteur $\vec{\tau}$ soit normal à (Γ).

b. Montrer que (Γ) est un arc plan. Soit λ_0 la fonction définie au *a.* telle que $\lambda_0(0) = 0$ et (Γ_0) l'arc correspondant. Construire avec précision l'arc (Γ_0) lorsque s prend les valeurs du segment $[-5\pi, +5\pi]$. Montrer que la développée de (Γ_0) est la projection de (γ) sur $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II

Soit M un point mobile de E tel qu'à l'instant t son vecteur vitesse soit $\sqrt{2}\,[(3-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (3+y)\vec{k}]$ où (x, y, z) désignent les coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$. A l'instant $t = 0$, le point M est en M_0 de coordonnées $(x_0, 0, z_0)$. Soit (Γ_{M_0}) l'arc décrit par le point M.

1° Déterminer les coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$ en fonction de t, x_0, z_0.

2° Soit $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ le repère déduit de $\mathcal{R}$ par une rotation d'axe orienté $(O, \vec{j})$ d'angle de mesure $+\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Trouver les coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M dans le repère $\mathcal{R}_1$. Montrer que M se déplace sur une hélice circulaire.

3° Lorsque le point M_0 décrit la droite d'équations $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R}$, montrer que les arcs correspondants (Γ_{M_0}) engendrent une surface (S). Trouver une famille de droites génératrices de (S).

4° Montrer qu'il existe un couple de réels (x_0, z_0) tel que M décrive dans $\mathcal{R}_1$ l'arc (Γ_1) défini paramétriquement par :

$$\varphi \in \mathbb{R} \longrightarrow M \begin{cases} x_1 = 4\cos\varphi \\ y_1 = 4\sin\varphi \\ z_1 = 3\varphi \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \varphi = 2t$$

5° Dans cette question le point M décrit l'arc (Γ_1) défini dans la question précédente. Soit m le point mobile dans le repère $\mathcal{R}_1$ défini par : $\overrightarrow{Om} = f(t)\,\vec{i}_1$ où f est une fonction numérique dérivable lorsque t prend les valeurs de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit N le point défini par :

$$\overrightarrow{mN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$$

.../...

142
ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE
1983

a. Déterminer la fonction dérivable f telle que, pour tout t,

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{Om}}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\overrightarrow{ON}}{dt} \right\| \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

b. Donner alors les coordonnées du point N. Construire l'arc décrit par la projection orthogonale de N sur $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$.

III

t désigne le temps.

Soit A la projection orthogonale du point M définie au II. 4° sur $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$

$$A \begin{cases} x_A = 4\cos 2t \\ y_A = 4\sin 2t \\ z_A = 0 \end{cases}$$

Soit deux réels non nuls a et ω et trois vecteurs $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ définis par :

$$\vec{I} = \cos\omega t \sin at\, \vec{i}_1 + \sin\omega t \sin at\, \vec{j}_1 + \cos at\, \vec{k}_1$$

$$\vec{J} = -\sin\omega t\, \vec{i}_1 + \cos\omega t\, \vec{j}_1$$

$$\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$$

1° Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormée directe. Vérifier que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est l'image de $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ par la composée de deux rotations que l'on déterminera.

2° Soit (Σ) un solide mobile dans le repère $\mathcal{R}_1$, le repère $\mathcal{R}_A = (A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est lié à (Σ).

a. Donner les coordonnées (x_1, y_1, z_1) d'un point M de (Σ) dans le repère $\mathcal{R}_1$ en fonction de ses coordonnées (X, Y, Z) dans $\mathcal{R}_A$.

b. Déterminer les coordonnées du vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$ et dans le repère $\mathcal{R}_A$.

c. Soit $\overrightarrow{V_t(M)}$ le vecteur vitesse d'un point M de (Σ) à l'instant t. On note $\vec{V}'_t$ la projection orthogonale de $\vec{V}_t(M)$ sur $\vec{\Omega}$. Déterminer λ en fonction de t, ω, a tel que $\vec{V}'_t = \lambda(t)\,\vec{\Omega}$.

Dans la suite on pose $\omega = a = 2$.

d. Déterminer alors l'axe instantané de rotation glissement $(\mathcal{L})$:

— dans $\mathcal{R}_1$ [On exprimera x_1 et y_1 en fonction de z_1 et de t]

— dans $\mathcal{R}_A$ [On exprimera X et Z en fonction de Y et de t].

e. Déterminer les équations des surfaces (S_1) et (S_A) engendrées par $(\mathcal{L})$ dans son mouvement relatif à $\mathcal{R}_1$ et dans son mouvement relatif à $\mathcal{R}_A$. Reconnaître ces surfaces. [On pourra étudier les sections de ces surfaces par les plans de coordonnées.]

FIN